ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 **(A)** Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ ισχύει:

$$(\kappa+\lambda+\mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa).$$

Πότε ισχύει η ισότητα;
(B) Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha(x+y+z)=\beta(xy+yz+zx)=xyz,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 3\beta^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;
Λύση(Α) Κάνοντας πράξεις βλέπουμε ότι η προς απόδειξη βοηθητική ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+2\kappa\lambda+2\lambda\mu+2\mu\kappa \geq 3\kappa\lambda+3\lambda\mu+3\mu\kappa,$$

ή, ισοδύναμα με την

$$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2-\kappa\lambda-\lambda\mu-\mu\kappa \geq 0.$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$(\kappa-\lambda)^2+(\lambda-\mu)^2+(\mu-\kappa)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ, με την ισότητα να αληθεύει αν και μόνο αν $\kappa=\lambda=\mu$. ■

(Β) (1ος τρόπος)
Από την δοθείσα σχέση παίρνουμε ότι:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx} \text{ και } \frac{1}{\beta}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι $\alpha, \beta>0$ και από τη βοηθητική ανισότητα θέτοντας

$$\kappa=\frac{1}{x}, \lambda=\frac{1}{y} \text{ και } \mu=\frac{1}{z}$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = \frac{3}{\alpha}.$$

Από την τελευταία παίρνουμε $\alpha \geq 3\beta^2$, που είναι το ζητούμενο. Η ισότητα αληθεύει αν και μόνο αν $x = y = z$.

(2ος τρόπος) Λύνοντας τις δοθείσες εξισώσεις ως προς α και β παίρνουμε

$$\alpha = \frac{xyz}{x+y+z} \text{ και } \beta = \frac{xyz}{xy+yz+zx}.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{xyz}{x+y+z} \geq 3\left(\frac{xyz}{xy+yz+zx}\right)^2,$$

ή ισοδύναμα, μετά από απαλοιφή των παρονομαστών, αφού $x, y, z > 0$, ότι

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z).$$

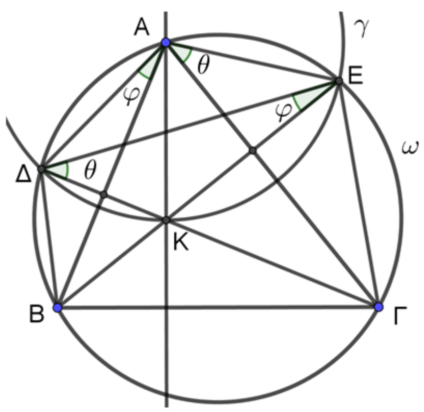
Η τελευταία έπεται από την βοηθητική ανισότητα με $\kappa = xy$, $\lambda = yz$ και $\mu = zx$.

Η ισότητα αληθεύει, αν, και μόνο αν, $xy = yz = zx$ ή ισοδύναμα: $x = y = z$.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του ω. Με κέντρο το σημείο Α γράφουμε κύκλο γ που τέμνει το τόξο ΑΒ του κύκλου ω, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Δ και το τόξο ΑΓ, που δεν περιέχει το Β, στο σημείο Ε. Υποθέτουμε ότι το σημείο τομής Κ των ευθειών ΒΕ και ΓΔ ανήκει στον κύκλο γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

Λύση (1ος τρόπος)



Από τη σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνουν στο τόξο ΔΚ του κύκλου γ, έχουμε:

$$\Delta\widehat{A}K = 2 \cdot \Delta\widehat{E}K \qquad (1)$$

Από ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο τόξο ΒΔ του κύκλου ω έχουμε:

$$\Delta\widehat{E}K = \Delta\widehat{A}B \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\Delta\widehat{A}K = 2 \cdot \Delta\widehat{A}B,$$

οπότε η ευθεία ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\widehat{A}K$. Επειδή $A\Delta = AK$, ως ακτίνες του κύκλου γ, το τρίγωνο ΔΑΚ είναι ισοσκελές, οπότε θα είναι $AB \perp \Delta K$, δηλαδή $AB \perp \Gamma\Delta$. Ομοίως προκύπτει και ότι $A\Gamma \perp BE$. Άρα το σημείο Κ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $AK \perp B\Gamma$.

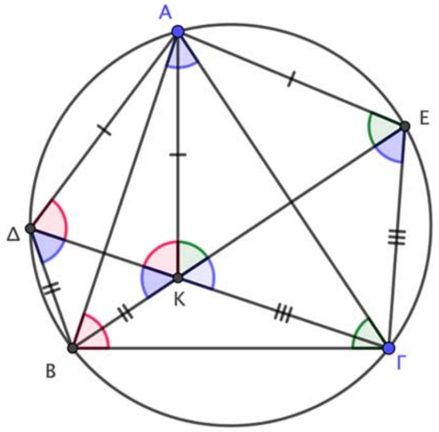
(2^{ος} τρόπος) Από το εγγεγραμμένο πεντάγωνο ΒΔΑΕΓ, βλέπουμε ότι $\widehat{\text{ΒΔΓ}} = \widehat{\text{ΒΕΓ}} = \widehat{\text{ΒΑΓ}}$ (1). Επίσης, αφού το τρίγωνο ΔΑΚ είναι ισοσκελές, έχουμε $\widehat{\text{ΑΚΔ}} = \widehat{\text{ΑΔΚ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}}$. Ομοίως, αφού το τρίγωνο ΕΑΚ είναι ισοσκελές, έχουμε $\widehat{\text{ΑΚΕ}} = \widehat{\text{ΑΕΚ}} = \widehat{\text{ΑΓΒ}}$.
Συνεπώς, $\widehat{\text{ΔΚΕ}} = \widehat{\text{ΑΒΓ}} + \widehat{\text{ΑΓΒ}}$, οπότε

$$\widehat{\text{ΔΚΒ}} = \widehat{\text{ΕΚΓ}} = 180^\circ - \widehat{\text{ΔΚΕ}} = 180^\circ - \widehat{\text{ΑΒΓ}} - \widehat{\text{ΑΓΒ}} = \widehat{\text{ΒΑΓ}} \ (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι ΒΔ = ΒΚ. Αφού ΑΔ=ΑΚ και ΒΔ=ΒΚ, τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΔΚ, οπότε η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοκάθετος του ΔΚ. Συνεπώς,

$$\widehat{\text{ΒΑΚ}} = 90^\circ - \widehat{\text{ΑΚΔ}} = 90^\circ - \widehat{\text{ΑΒΓ}},$$

οπότε η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.



Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους δεκαέξι θετικούς διαιρέτες του 2024 στα κελιά του διπλανού πίνακα έτσι ώστε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Ναι, μπορούμε. Οι διαιρέτες του $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ είναι οι δεκαέξι αριθμοί

$$1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024.$$

Κανείς τους δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες, αυτούς που αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3:

$$1, 4, 22, 46, 88, 184, 253, 1012,$$

και σε αυτούς που αφήνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3:

$$2, 8, 11, 23, 44, 92, 506, 2024.$$

Κάθε ομάδα αποτελείται από οκτώ αριθμούς. Επίσης, παρατηρούμε ότι μια στήλη ή μια γραμμή του τετραγωνικού πλέγματος μπορεί να έχει άθροισμα το οποίο να είναι πολλαπλάσιο του 3 αν και μόνο αν περιέχει δύο αριθμούς της πρώτης ομάδας και δύο αριθμούς της δεύτερης ομάδας.
Ας επιλέξουμε από κάθε στήλη και κάθε γραμμή του πλέγματος ακριβώς δύο κελιά για να τοποθετήσουμε τους οκτώ αριθμούς της πρώτης ομάδας. (Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε με $6 \cdot 6 = 36$ τρόπους). Μια τέτοια επιλογή είναι, για παράδειγμα, η εξής:

1			4
22			46
	88	184	
	253	1012	

Στη συνέχεια ας τοποθετήσουμε τους αριθμούς της δεύτερης ομάδας στα κενά κελιά του πλέγματος, έναν σε κάθε κελί και με όποια σειρά θέλουμε. Για παράδειγμα, μια ολοκληρωμένη επιλογή είναι η εξής:

1	2	8	4
22	11	23	46
44	88	184	92
506	253	1012	2024

Στον τελικό πίνακα παρατηρούμε ότι το άθροισμα των αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Να δειχθεί ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) τέτοιες ώστε

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6xyz.$$

Λύση. Γράφοντας της δοθείσα σχέση ως

$$x^2 + y^2 + xy = (6xy - x - y - z)z$$

βλέπουμε ότι αντικαθιστώντας το z με το $6xy - x - y - z$, το δεξί μέλος παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι, αν (x, y, z) είναι λύση της (1) με $x > y > z$, τότε λύση της είναι και η

$(6xy - x - y - z, x, y)$ με $6xy - x - y - z > x > y$, αφού

$$(6xy - x - y - z) - x = \frac{x^2 + y^2 + xy}{z} - x = \frac{x(x - z) + y^2 + xy}{z} > 0.$$

Παρατηρώντας ότι η $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ είναι λύση της (1) παίρνουμε την $(x, y, z) =$(3, 1, 1), η οποία με τη σειρά της δίνει την $(x, y, z) = (13, 3, 1)$ (με $13 > 3 > 1$).

Συμπεραίνουμε ότι η (1) έχει άπειρες ακέραιες λύσεις (x, y, z) με $x > y > z > 0$